Die elektrische Strahlung isomerer Kerne mit ungerader Neutronenzahl

Von Berthold Stech

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Heidelberg

(Z. Naturforschg. **9a**, 1—4 [1954]; eingegangen am 21. September 1953)

Kerne mit ungerader Neutronenzahl können ihre Anregungsenergie auch beim strengen Einteilchenmodell unter Aussendung elektrischer Multipolstrahlung verlieren. Die Ausstrahlung wird durch einen relativistischen Term, der vom magnetischen Moment des Neutrons herrührt, ermöglicht. Seine Berechnung führt zu ungefährer Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden. Weiter wird eine durchsichtige Herleitung der Formeln für die magnetische Multipolstrahlung angegeben.

Die experimentell gefundene Tatsache, daß Kerne mit ungerader Neutronenzahl ihre Anregungsenergie auch unter Aussendung elektrischer Multipolstrahlung verlieren können, scheint zunächst auf immerhin merkbare Abweichungen vom Einteilchenmodell hinzuweisen[1,2]. Die Strahlung, die der Restkern infolge seiner Mitbewegung aussendet, ist nämlich zu gering [proportional $(Z/A^L)^2$; L: Multipolordnung][3], um für solche Übergänge verantwortlich zu sein. Ein von Weisskopf[2,4] angegebener Beitrag zur elektrischen Strahlung, der vom magnetischen Moment herrührt, ist ebenfalls klein und hat außerdem eine von der normalen elektrischen Strahlung abweichende Frequenzabhängigkeit. Nun gibt es jedoch einen zweiten relativistischen Term von der Größenordnung v/c. Seine anschauliche Interpretation ist die, daß der bewegte magnetische Dipol des Neutrons zugleich als elektrisches Moment wirkt [s. u. Gl. (1)]. Zusammen mit dem von Weisskopf berücksichtigten Ausdruck liefert er die richtige Frequenzabhängigkeit und ergibt eine größere Ausstrahlungswahrscheinlichkeit[5] als der Weisskopfsche Term. Die ungenaue Abschätzung des entsprechenden Matrixelements in S I wird in vorliegender Arbeit durch exakte Formeln ersetzt.

1. Theoretische und experimentelle Übergangswahrscheinlichkeiten

Die Bewegung des Neutrons wird mit Hilfe der Dirac-Gleichung beschrieben, das anomale Moment mit einem entsprechenden Pauli-Zusatzterm[6]:

$$\mu \frac{e\hbar}{2Mc} \cdot \{ -\beta\,(\vec{S}\,\mathfrak{H}_L^*) + i\beta\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{E}_L^*) \}; \qquad (1)$$

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{S} = \begin{pmatrix} \vec{\sigma} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die später benötigte Matrix

$$\varrho_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{mit } 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

sind Dirac-Matrizen, $\mu = -1{,}91$, $\mathfrak{E}_L$ bzw. $\mathfrak{H}_L$ bezeichnet die elektrische bzw. magnetische Feldstärke des Multipolfeldes[5]. Der erste, von Weisskopf allein berücksichtigte Summand in (1), $\mu\beta\,(\vec{S}\,\mathfrak{H})$, gibt für die magnetische Multipolstrahlung einen nichtrelativistischen Beitrag. Eine elektrische Multipolstrahlung tritt als Folge von (1) erst als relativistischer Effekt auf und zwar liefert der zweite Summand, $\mu i\beta\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{E})$, den größeren Beitrag. Um beide Anteile in übersichtlicher Weise zu erfassen, formt man zweckmäßig das zu (1) gehörige Matrixelement so um, daß ein einziger Term entsteht. Dies gelingt — wie im 2. Abschnitt ausgeführt — mit Hilfe der Dirac-Gleichung. Man erhält:

$$-\mu \frac{e\hbar}{Mc} \int \left(\psi_B^* \beta\,\varrho_1 \frac{\vec{\nabla}}{i k} \psi_A \right) \cdot \mathfrak{H}_L^* \,\mathrm{d}\tau; \qquad (2)$$

A bezeichnet den Ausgangszustand, B den Endzustand.

Bei kugelsymmetrischem Potential läßt sich (2) weiter vereinfachen (siehe 2. Abschnitt). Es ergibt sich für die vom anomalen Moment herrührende Ausstrahlungswahrscheinlichkeit für elektrische Multipolstrahlung

[1] M. Goldhaber u. A. W. Sunyar, Physic. Rev. **83**, 906 [1951].

[2] V. F. Weisskopf, Physic. Rev. **83**, 1073 [1951].

[3] St. A. Moszkowski, Physic. Rev. **89**, 474 [1953].

[4] J. M. Blatt u. V. F. Weisskopf, Theoretical Nuclear Physics, John Wiley & Sons, New York 1952.

[5] B. Stech, Z. Naturforschg. **7a**, 401 [1952]; künftig als SI zitiert.

[6] W. Pauli, Hdb. Physik XXIV/1 S. 233. An Stelle der reellen Felder wurden in (1) gleich die komplexen Felder, die der Erzeugung eines Lichtquants entsprechen, eingesetzt.

$$\overline{W}^{EL} = \omega \frac{e^2}{\hbar c} \frac{(kR)^{2L}}{[(2L+1)!!]^2} \cdot \mu^2 \left(\frac{\hbar}{McR}\right)^2 \frac{L}{L+1} \, |G_\mu|^2 \cdot \overline{F^2} \tag{3}$$

mit

$$G_\mu = \frac{1}{2L} \Big[\{L(L+1) - (a-b)(a-b+1)\} \cdot \int \left(\frac{r}{R}\right)^{L-1} g_B(r)\, h_A(r)\, r^2 \, \mathrm{d}r \tag{4}$$
$$+ \{L(L+1) - (b-a)(b-a+1)\} \cdot \int \left(\frac{r}{R}\right)^{L-1} h_B(r)\, g_A(r)\, r^2 \, \mathrm{d}r \Big].$$

$$\begin{aligned} a &= j_A - \tfrac{1}{2} && \text{für } j_A = l_A + \tfrac{1}{2}; \\ b &= j_B - \tfrac{1}{2} && \text{für } j_B = l_B + \tfrac{1}{2}; \\ a &= -\left(j_A + \tfrac{3}{2}\right) && \text{für } j_A = l_A - \tfrac{1}{2}; \\ b &= -\left(j_B + \tfrac{3}{2}\right) && \text{für } j_B = l_B - \tfrac{1}{2}. \end{aligned} \tag{5}$$

Das Auftreten der „kleinen" Radialfunktion $h(r)$ zusammen mit den „großen" $g(r)$ läßt erkennen, daß es sich um einen relativistischen Effekt handelt. $\overline{F^2}$ ist ein in S I erläuterter und berechneter Faktor, der vom Drehimpuls des Ausgangs- und Endzustandes abhängt. Um aus (3) die Zerfallskonstante zu errechnen, ist noch mit der Multiplizität des Endzustandes $2j_B + 1$ zu multiplizieren und der Koeffizient für die innere Umwandlung anzubringen. Gl. (3) zeigt, daß die vom magnetischen Moment herrührende Strahlung dieselbe Frequenzabhängigkeit besitzt wie die normale elektrische Strahlung eines Protons[5]. Sie ist jedoch, wie aus einem Vergleich mit S I [Gl. (33)] ersichtlich, um den Faktor

$$\mu^2 \left(\frac{L}{L+1}\right)^2 \left(\frac{\hbar}{McR}\right)^2 \frac{|G_\mu|^2}{|G_E|^2} \tag{6}$$

geringer.

Beschränkt man sich auf die kleinst mögliche Multipolordnung $L = |j_A - j_B|$, so gilt für die elektrische 2^L-Polstrahlung nach (5)

$$a - b = \pm L. \tag{7}$$

Damit vereinfacht sich G_μ, und aus (4) wird

für $j = l + 1/2$ und $j_A > j_B$
oder $j = l - 1/2$ und $j_A < j_B$

$$G_\mu = \int \left(\frac{r}{R}\right)^{L-1} h_B(r)\, g_A(r)\, r^2 \, \mathrm{d}r, \tag{8a}$$

und für $j = l + 1/2$ und $j_A < j_B$
oder $j = l - 1/2$ und $j_A > j_B$

$$G_\mu = \int \left(\frac{r}{R}\right)^{L-1} g_B(r)\, h_A(r)\, r^2 \, \mathrm{d}r. \tag{8b}$$

Nach dem Schalenmodell sollten reine Einteilchenübergänge bei der E 3-Strahlung der Isomere Cd^{111}, Xe^{127} und $Pd^{107,109}$ vorliegen[7,8], nämlich Übergänge zwischen den Zuständen $h_{11/2}$ und $d_{5/2}$; bei Dy^{165} ist ein Übergang $i_{13/2} \to f_{7/2}$ wahrscheinlich. Bei den übrigen Isomeren der E 3-Gruppe koppeln sich mehrere Teilchen in einer Schale und die Strahlungen müssen durch Mischungen von mehreren Zuständen erklärt werden, so daß diese Isomere für unsere Betrachtung nicht herangezogen werden können[1,3]. Für den Übergang $h_{11/2} \to d_{5/2}$ wurde G_μ nach (8a) einmal mit Hilfe der Eigenfunktionen des Oszillatorpotentials und ebenso mit Hilfe der Eigenfunktionen des Potentialtopfes berechnet.

Beim Oszillatorpotential wurden die „kleinen" Radialfunktionen aus den nichtrelativistischen Lösungen wie beim gewohnten Übergang zur nichtrelativistischen Näherung durch Differentation gewonnen. Die Berechnung für den Fall des Potentialtopfes erleichterten die von Brysk[9] angegebenen numerischen Werte und Integrale. Es ergab sich für $A = 100$

mit Oszillatoreigenfunktionen $|G_\mu| = 0{,}34 \cdot 10^{-1}$
und mit den Eigenfunktionen des Potentialtopfes

$$|G_\mu| = 0{,}50 \cdot 10^{-1}, \tag{9}$$

was ungefähr der Erwartung für das Verhältnis der kleinen zu den großen Radialfunktionen $\approx \hbar/McR$ entspricht. Demgegenüber betragen die experimentellen — auf $A = 100$ korrigierten — $|G_\mu|$-Werte für Cd^{111} $0{,}6 \cdot 10^{-1}$, für Xe^{127} $2{,}3 \cdot 10^{-1}$ und für $Pd^{107,109}$ $2{,}2 \cdot 10^{-1}$. Fast der gleiche Wert ergibt sich auch für Dy^{165}: $2{,}1 \cdot 10^{-1}$ (Übergang $i_{13/2} \to f_{7/2}$). Die experimentellen Matrixelemente für E 3-Übergänge sind also mit überraschender Konstanz um einen Faktor ≈ 5 größer als die theoretischen. Eine Ausnahme bildet Cd^{111}, dessen Matrixelement mit dem berechneten besser übereinstimmt.

[7] M. Goldhaber u. R. D. Hill, Rev. mod. Physics, **24**, 179 [1952].

[8] A. Flammersfeld, Z. Naturforschg. **7a**, 296 [1952].

[9] H. Brysk, Physic. Rev. **86**, 996 [1952].

2. Durchführung der Rechnungen

Aus Gl. (1) kann Gl. (2) wie folgt gewonnen werden:

Multipliziert man die Dirac-Gleichung für den Zustand A

$$E_A\,\psi_A = c\,(\vec{\alpha}\,\vec{p})\,\psi_A + \beta M c^2\,\psi_A + V(r)\,\psi_A \qquad (10)$$

mit $\psi_B^*\beta\vec{S}$ von links, so erhält man unter Zuhilfenahme der Diracschen Beziehung S I, Gl. (21)

$$E_A\,(\psi_B^*\beta\vec{S}\psi_A) = c\,(\psi_B^*\beta\varrho_1\vec{p}\,\psi_A) - i\,c\,(\psi_B^*\beta\,[\vec{\alpha}\,\vec{p}]\,\psi_A) + Mc^2\,(\psi_B^*\vec{S}\psi_A) + V\,(\psi_B^*\beta\vec{S}\psi_A)\,. \qquad (11)$$

Multiplikation der konjugiert-komplexen Dirac-Gleichung für den Zustand B mit $\beta\vec{S}\psi_A$ von rechts und Subtraktion von (11) ergibt

$$k\,(\psi_B^*\beta\vec{S}\psi_A) - \mathrm{rot}\,(\psi_B^*\beta\vec{\alpha}\,\psi_A) = \psi_B^*\beta\varrho_1\frac{\vec{\nabla}}{i}\,\psi_A - (\vec{\nabla}\,\psi_B)^*\,\beta\,\frac{\varrho_1}{i}\,\psi_A\,. \qquad (12)$$

Setzt man nun in (1) $\mathfrak{E}^* = 1/ik$ rot $\mathfrak{H}^*$ ein, bildet das Matrixelement und integriert partiell, so ergibt sich

$$-\mu\frac{e\hbar}{2Mc}\int\left\{(\psi_B^*\beta\vec{S}\psi_A) - \frac{1}{k}\,\mathrm{rot}\,(\psi_B^*\beta\vec{\alpha}\,\psi_A)\right\}\mathfrak{H}_L^*\,d\tau\,. \qquad (13)$$

Mit Hilfe von (12) und nach einer weiteren partiellen Integration unter Beachtung von div $\mathfrak{H} = 0$ gelangt man nun zu Gl. (2).

Um Gl. (2) weiter zu behandeln, setzt man in ihr den expliziten Ausdruck für die Feldstärke $\mathfrak{H}_L$ ein. Es ist nach S I, Gl. (1) für die elektrische Multipolstrahlung

$$\mathfrak{H}_L^* = \mathrm{rot}\,\mathfrak{A}_L^* = k\,\mathfrak{L}^*\,f_L\,(kr)\,\overset{*}{Y}_L\,.$$

Der Operator $\vec{\nabla}/i$ in (2) kann in der Form

$$\frac{\vec{\nabla}}{i} = \frac{1}{i}\,\frac{\mathfrak{r}}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\left[\mathfrak{r}\,\frac{[\mathfrak{r}\vec{\nabla}]}{i}\right] = \frac{1}{i}\,\frac{\mathfrak{r}}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{L}] \qquad (14)$$

geschrieben werden, wobei das 1. Glied im Skalarprodukt mit $\mathfrak{H}$ verschwindet. Benutzt man nun noch die Dirac-Identität [S I, Gl. (21)] für die Vektoren $\mathfrak{L}\overset{*}{Y}_L$ und $[\mathfrak{r}\,\mathfrak{L}]\,\psi_A$

$$(\mathfrak{L}\overset{*}{Y}_L)\cdot([\mathfrak{r}\,\mathfrak{L}]\,\psi_A) = \left\{(\vec{S}\,\mathfrak{L})\,\overset{*}{Y}_L\right\}\cdot(\vec{S}\cdot[\mathfrak{r}\,\mathfrak{L}]\,\psi_A) - i\,(\vec{S}\cdot[(\mathfrak{L}\overset{*}{Y}_L),[\mathfrak{r}\,\mathfrak{L}]\,\psi_A]) = \left\{(\vec{S}\,\mathfrak{L})\,\overset{*}{Y}_L\right\}\cdot\frac{r}{i}\,S_r\,(\vec{S}\,\mathfrak{L})\,\psi_A - i\,r\,S_r\,(\mathfrak{L}\overset{*}{Y}_L)\,(\mathfrak{L}\,\psi_A) \qquad (15)$$

mit $S_r = \left(\vec{S}\cdot\frac{\mathfrak{r}}{r}\right)$, so schreibt sich das Matrixelement (2)

$$+\mu\,i\,\frac{e\hbar}{Mc}\int\frac{f_L(kr)}{r}\left\{\psi_B^*\beta\varrho_1\left\{(\vec{S}\cdot\mathfrak{L})\,\overset{*}{Y}_L\right\}S_r\,(\vec{S}\,\mathfrak{L})\,\psi_A + \psi_B^*\beta\varrho_1\left\{(\mathfrak{L}\overset{*}{Y}_L)\cdot\mathfrak{L}\right\}\psi_A\right\}d\tau\,. \qquad (16)$$

Mittels $\psi = \begin{pmatrix}\psi_{\mathrm{I}}\\ \psi_{\mathrm{II}}\end{pmatrix}$ führt man nun zweckmäßig die zweikomponentigen Spinoren ein. Für den ersten Teil des Matrixelements (16) erhält man so

$$\mu\,i\,\frac{e\hbar}{Mc}\int\frac{f_L(kr)}{r}\left[\psi_{B\mathrm{I}}^*\left\{(\vec{\sigma}\,\mathfrak{L})\,\overset{*}{Y}_L\right\}\sigma_r\,(\vec{\sigma}\,\mathfrak{L})\,\psi_{A\mathrm{II}} - \begin{pmatrix}\text{Vertauschung}\\ \text{von I mit II}\end{pmatrix}\right]d\tau\,. \qquad (17)$$

Benutzt man nun die Relationen (vgl. S I, Abschnitt 1 B)

$$\begin{aligned}\vec{\sigma}\,\mathfrak{L}\quad\psi_{A\mathrm{I}} &= a\quad\psi_{A\mathrm{I}}\,; & \vec{\sigma}\,\mathfrak{L}\,\sigma_r\,\psi_{A\mathrm{I}} &= -(a+2)\,\sigma_r\,\psi_{A\mathrm{I}}\,;\\ \vec{\sigma}\,\mathfrak{L}\,\sigma_r\,\psi_{A\mathrm{II}} &= a\,\sigma_r\,\psi_{A\mathrm{II}}\,; & \vec{\sigma}\,\mathfrak{L}\quad\psi_{A\mathrm{II}} &= -(a+2)\quad\psi_{A\mathrm{II}}\,;\end{aligned} \qquad (18)$$

und entsprechende Relationen für ψ_B, so folgt nach einfacher partieller Integration für dieses Integral

$$\mu\,i\,\frac{e\hbar}{Mc}\left[-(a+2)\,(b-a)\int\frac{f_L}{r}\,\psi_{B\mathrm{I}}^*\,\sigma_r\,\psi_{A\mathrm{II}}\,\overset{*}{Y}_L\,d\tau - \begin{pmatrix}\text{Vertauschung von I mit II}\\ a\text{ mit }-(a+2)\text{ und}\\ b\text{ mit }-(b+2)\end{pmatrix}\right]. \qquad (19)$$

Für den zweiten Teil des Matrixelementes (14) ergibt sich

$$\mu\,i\,\frac{e\hbar}{Mc}\int\frac{f_L(kr)}{r}\left\{\psi_{B\mathrm{I}}^*\,\sigma_r\left\{(\mathfrak{L}\overset{*}{Y}_L)\cdot\mathfrak{L}\,\psi_{A\mathrm{II}}\right\} - \begin{pmatrix}\text{Vertauschung}\\ \text{von I und II}\end{pmatrix}\right\}d\tau\,. \qquad (20)$$

Dieses Integral läßt sich durch mehrfache partielle Integration und unter Benutzung der Relation $\mathfrak{L}^2 = (\vec{\sigma}\,\mathfrak{L})\,(\vec{\sigma}\,\mathfrak{L}) + \vec{\sigma}\,\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^2\,\overset{*}{Y}_L = L\,(L+1)\,\overset{*}{Y}_L$ überführen in

$$\mu\,i\,\frac{e\hbar}{2Mc}\left[\{(a+2)\,(a+1) - (b+2)\,(b+1) - L\,(L+1)\}\int\frac{f_L}{r}\,\psi^*_{B\mathrm{I}}\,\sigma_r\,\psi_{A\mathrm{II}}\,\overset{*}{Y}_L\,\mathrm{d}\tau - \begin{pmatrix}\text{Vertauschung}\\ \text{wie in (19)}\end{pmatrix}\right]. \tag{21}$$

Addition von (17) und (19) ergibt

$$\mu\,i\,\frac{e\hbar}{2Mc}\left[\{(a-b)\,(a-b+1) - L\,(L+1)\}\int\frac{f_L}{r}\,\psi^*_{B\mathrm{I}}\,\sigma_r\,\psi_{A\mathrm{II}}\,\overset{*}{Y}_L\,\mathrm{d}\tau - \begin{pmatrix}\text{Vertauschung}\\ \text{wie in (19)}\end{pmatrix}\right]. \tag{22}$$

Durch Abspalten der Radialfunktionen und Einsetzen der Näherung

$$f_L\,(kr) \cong \frac{(kr)^L}{(2L+1)!!}\,; \quad (2L+1)!! = 1\cdot 3\cdots(2L+1)$$

erhält man die gesuchte Gl. (3) (vgl. S I).

Magnetische Strahlung. Schließlich sei noch eine durchsichtigere Berechnung für die magnetische Strahlung angegeben, als die in S I, Abschnitt B durchgeführte.

In S I Gl. (20) stellt

$$e\,Q_1^M = -\,e\int(\psi^*_B\,\vec{\alpha}\,\psi_A)\cdot\mathfrak{L}^*\,f_L\,(kr)\,\overset{*}{Y}_L\,\mathrm{d}\tau \tag{23}$$

die magnetische Strahlung eines Dirac-Teilchens ohne zusätzliches, anomales magnetisches Moment dar. Das Ergebnis der Umformung dieses Ausdruckes lautet [S I Gl. (30)]:

$$e\,Q_1^M = i\,\frac{e\hbar}{2Mc}\,(a+b+2)\cdot\left[(L+a+b+2)\int\frac{f_L\,(kr)}{r}\,\overset{*}{Y}_L\,(\psi^*_{B\mathrm{I}}\,\sigma_r\,\psi_{A\mathrm{I}})\,\mathrm{d}\tau + \begin{pmatrix}\text{Vertauschung}\\ \text{wie in (19)}\end{pmatrix}\right]. \tag{24}$$

Im Gegensatz zu S I sollen die beiden vom Pauli-Term (1) stammenden Beiträge (Q_2^M und Q_3^M in S I) nun aber, wie oben im Falle der elektrischen Strahlung, gemeinsam umgeformt werden. $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ in (1) stellen jetzt die Felder für magnetische Multipolstrahlung dar:

$$\mathfrak{E}^*_L = \frac{k}{i}\,\mathfrak{L}^*\,f_L\,\overset{*}{Y}_L; \qquad \mathfrak{H}^*_L = \mathrm{rot}\;\mathfrak{L}^*\,f_L\,\overset{*}{Y}_L\,.$$

Damit ergibt sich für das Matrixelement von (1)

$$\mu\,\frac{e\hbar}{2Mc}\int\{-\,\mathrm{rot}\,(\psi^*_B\,\beta\,\vec{S}\,\psi_A) + k\,(\psi^*_B\,\beta\,\vec{\alpha}\,\psi_A)\}\,\mathfrak{L}^*\,f_L\,(kr)\,\overset{*}{Y}_L\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{25}$$

Ähnlich wie Gl. (12) läßt sich aus der Dirac-Gl. (10) durch Multiplikation mit $\psi^*_B\,\beta\,\vec{\alpha}$ die Formel gewinnen:

$$\mathrm{rot}\,(\psi^*_B\,\beta\,\vec{S}\,\psi_A) - k\,(\psi^*_B\,\beta\,\vec{\alpha}\,\psi_A) = \frac{2Mc}{\hbar}\,(\psi^*_B\,\vec{\alpha}\,\psi_A) + (\vec{\nabla}\,\psi^*_B)\,\frac{\beta}{i}\,\psi_A - \left(\psi^*_B\,\beta\,\frac{\vec{\nabla}}{i}\,\psi_A\right). \tag{26}$$

Einsetzen in (25) ergibt für die vom anomalen magnetischen Moment herrührende magnetische Multipolstrahlung

$$-\,\mu\,e\int(\psi^*_B\,\vec{\alpha}\,\psi_A)\,\mathfrak{L}^*\,f_L\,\overset{*}{Y}_L\,\mathrm{d}\tau + \mu\,\frac{e\hbar}{Mc}\int\left(\psi^*_B\,\beta\,\frac{\vec{\nabla}}{i}\,\psi_A\right)\,\mathfrak{L}^*\,f_L\,\overset{*}{Y}_L\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{27}$$

Das 1. Integral dieser Formel hat (abgesehen vom Faktor μ) genau die Gestalt des Matrixelements für magnetische Strahlung eines geladenen Dirac-Teilchens ohne anomales Moment (23) und ist in (24) bereits ausgerechnet. Das 2. Integral von (27) ist bis auf die Matrix ϱ_1 und das Vorzeichen mit (2) identisch. ϱ_1 vertauscht aber nur $\psi_{A\mathrm{I}}$ mit $\psi_{A\mathrm{II}}$, im Resultat der Ausrechnung von (2), d. h. in (22), ist daher nur $-(a+2)$ statt a zu setzen und $\psi_{A\mathrm{I}}$ mit $\psi_{A\mathrm{II}}$ zu vertauschen, um das Ergebnis für dieses 2. Integral in (27) zu erhalten.

So erhält man für (27)

$$\mu\,i\,\frac{e\hbar}{2Mc}\,(L+1)\left[(L+a+b+2)\int\frac{f_L}{r}\,\overset{*}{Y}_L\,(\psi^*_{B\mathrm{I}}\,\sigma_r\,\psi_{A\mathrm{II}})\,\mathrm{d}\tau - \begin{pmatrix}\text{Vertauschung}\\ \text{wie in (19)}\end{pmatrix}\right] \tag{28}$$

in Übereinstimmung mit S I Gl. (31).

Die Ausstrahlungswahrscheinlichkeit magnetischer Strahlung beträgt also für ein Neutron

$$\overline{W}^{LM} = \omega\,\frac{e^2}{\hbar c}\,\frac{(kR)^{2L}}{[(2L+1)!!]^2}\left(\frac{\hbar}{McR}\right)^2\frac{L+1}{L}\,|\,Q_M\,|^2\,,$$

$$Q_M = \frac{\mu}{2}\cdot\left[(L+a+b+2)\int\left(\frac{r}{R}\right)^{L-1} g_B\,(r)\,g_A\,(r)\,r^2\,\mathrm{d}r - \begin{pmatrix}\text{Ersetzung von } g\,(r) \text{ durch } h\,(r), \text{ von } a\\ \text{durch} -(a+2), \text{von } b \text{ durch} -(b+2)\end{pmatrix}\right]. \tag{29}$$

Den Herren A. Schoch und J. H. D. Jensen danke ich sehr herzlich für anregende Diskussionen.